

DIE UNTERSUCHUNG DER DYNAMIK DER ZIP-BIFURKATION

K. KISS

Institut für Mathematik
Technische Universität, H-1521 Budapest

Eigegangen: am 27. Juni, 1989.

Abstract

Two population dynamical models are studied where two predators are competing for a single regenerating prey species.

These models are three dimensional systems of differential equations, and the stability of their equilibria and bifurcations with the increase of the carrying capacity (K) are studied. It is proved that under special assumptions all ratios of the predators are stable. In the special case of the Ivlevmodel there is not a significant difference in the response of the two predators, at a K -limit all the ratios of predators are simultaneously becoming unstable with a supercritical Hopf bifurcation. In the typical case we can see the competition of a K - and an r -strategist. The loss of stability happens by Zip bifurcation.

In the Rosenzweigmodel competition between K - and r -strategist cannot take place.

Keywords: Zibifurcation, Hopfbifurcation

1. Einleitung

Diese Arbeit untersucht solche ökologische Systeme, in denen zwei Raubtierrassen um die zur Ernährung dienende Beute kämpfen. Der Aufbau und die Wirkungsweise des allgemeinen populationsdynamischen Modells befindet sich in der Arbeit von FARKAS [4], in der die Geburtenraten der Raubtiere mit einer Funktion gekennzeichnet werden. Diese Funktionen können aber viele verschiedene konkrete Formen annehmen. (Siehe MAY [8]). In der Arbeit von FARKAS [3] befindet sich die Erklärung des sogenannten konkreten Modells von Holling. In dieser Arbeit jedoch bauen wir das konkrete Modell mit Hilfe der Funktionen von Ivlev und Rosenzweig auf, welche bisher von dem Gesichtspunkt der Bifurkation noch nicht aufgeführt wurden um die Bifurkationen zu kennzeichnen.

Gehen wir von dem allgemeinen Modell aus, welches mit folgendem dreidimensionalen System der Differentialgleichungen gekennzeichnet ist:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= \gamma S g(S, K) - x_1 p(S, a_1) - x_2 p(S, a_2) \\ \dot{x}_1 &= x_1 p(S, a_1) - d_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 p(S, a_2) - d_2 x_2 \end{aligned} \right\},$$

wobei $S(t)$ die Beute, $x_i(t)$ ($i=1, 2$) die Populationsdichte der Raubtiere in der Funktion der Zeit darstellen. Die $\gamma g(S, K)$ Funktion zeigt die Vermehrungsrate der Beutetiere bei Raubtiermangel, $\gamma > 0$ größer null und stellt die maximale Vermehrungsrate der Beute bei Raubtiermangel ($\max_{0 \leq s < \infty} g(S, K) = 1$), $K > 0$ dagegen die Erhaltungsfähigkeit der Natur aus dem Gesichtspunkt der Beutetiere dar. Die Sterberate des i -ten Raubtiers ist konstant $d_i > 0$, die Geburtenrate ist die Funktion von $p(S, a_i)$, wobei $a_1 > 0$ auch konstant ist ($i=1, 2$).

Ein wichtiger Charakterzug der Raubtiere ist, daß neben der Beutezahl $S = \lambda_i$ die Vermehrungsrate gleich null ist, das heißt $p(\lambda_i, a_i) = d_i$. In dieser Arbeit werden wir den Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ betrachten, der bedeutet, daß die beiden Raubtiere bei der gleichen Beutezahl sich zu vermehren beginnen.

2.1. Das Modell von Ivlev

Wir bezeichnen die Vermehrungsrate der Beutetiere mit der sogenannten logistischen Geburtenrate [2]: $g(S, K) = 1 - S/K$, die Geburtenrate der Raubtiere wird durch die Funktion von Ivlev gekennzeichnet:

$$p(S, a_i) = \frac{A}{Ba_i + C} \left(1 - e^{-\frac{S}{a_i}} \right), \quad i = 1, 2,$$

$$a_i > 0, \quad B > 0, \quad C \in \mathcal{R}, \quad m_i = \frac{A}{Ba_i + C},$$

Die Funktionen g und p genügen bestimmten natürlichen Bedingungen, mit deren Hilfe wir das Modell der Natur anpassen [8]. Das konkrete Modell besitzt also folgende Form:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= \gamma S \left(1 - \frac{S}{K} \right) - x_1 m_1 \left(1 - e^{-\frac{S}{a_1}} \right) - x_2 m_2 \left(1 - e^{-\frac{S}{a_2}} \right) \\ \dot{x}_1 &= x_1 m_1 \left(1 - e^{-\frac{S}{a_1}} \right) - d_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 m_2 \left(1 - e^{-\frac{S}{a_2}} \right) - d_2 x_2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.1.1)$$

Wenn wir (2.1.1) untersuchen, können wir folgendes feststellen:

- a) Die Anwesenheit der Raubtiere vermindert die Vermehrungsrate der Beute mit der Geburtenrate des entsprechenden Raubtieres.
- b) Die Vermehrungsrate der Raubtiere ist neben der gegebenen Beutezahl nur dann groß, wenn der Ausdruck $m_i (1 - e^{-S/a_i}) - d_i$ ($i=1, 2$) auch groß ist, das heißt, wenn m_i groß ist, und d_i und a_i klein sind.
- c) Die Geburtenrate der Raubtiere konvergiert monoton wachsend gegen m_i , wenn $S \rightarrow \infty$, das heißt $\lim_{S \rightarrow \infty} m_i (1 - e^{-S/a_i}) = m_i$ ($i=1, 2$).
- d) Aus dem Modell ist erkennbar, daß das i -te Raubtier nur eine Überlebenschance besitzt, wenn $m_i > d_i$.

Führen wir die natürliche Vermehrungsrate der Raubtiere

$$\beta_i = m_i - d_i > 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.1.2)$$

ein, und den die Überlebensfähigkeit (fitness) bezeichnenden Ausdruck:

$$\lambda_i = a_i \ln \frac{m_i}{m_i - d_i} = a_i \ln \frac{m_i}{\beta_i} = a_i \ln \frac{1}{1 - \frac{d_i}{m_i}} \quad (i = 1, 2). \quad (2.1.3)$$

In dieser Arbeit werden wir uns mit solchen Rassen beschäftigen, die über eine gleiche Überlebensfähigkeit verfügen, das heißt $\lambda_1 = \lambda_2$. Da die Zahl der Beutetiere über einen langen Zeitraum nicht größer als K sein kann, ist zum Überleben des t -ten Raubtiers nötig

$$0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < K. \quad (2.1.4)$$

Mit den (2.1.2)–(2.1.4) können wir das System (2.1.1) in folgender Form schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - x_1 m_1 \left(1 - e^{-\frac{S}{a_1}}\right) - x_2 m_2 \left(1 - e^{-\frac{S}{a_2}}\right) \\ \dot{x}_1 &= x_1 \beta_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda - S}{a_1}}\right) \\ \dot{x}_2 &= x_2 \beta_2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda - S}{a_2}}\right) \end{aligned} \right\}. \quad (2.1.5)$$

$Q_1 = (0, 0, 0)$, $Q_2 = (K, 0, 0)$ und die Punkte auf dem nächsten geraden Abschnitt:

$$L_K = \left\{ (S, x_1, x_2); \quad x_1 m_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_1}}\right) + x_2 m_2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_2}}\right) = \gamma \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right); \right. \\ \left. S = \lambda, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \right\}. \quad (2.1.6)$$

kennzeichnen die Gleichgewichtslage des Systems (2.1.5). Bezeichnen wir die Punkte des L_K als (λ, ξ_1, ξ_2) . Die Endpunkte sind auf der $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ Fläche:

$$P_1 = (\lambda, 0, \xi_2) = \left(\lambda, 0, \frac{\gamma \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right)}{m_2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_2}}\right)} \right), \\ P_2 = (\lambda, \xi_1, 0) = \left(\lambda, \frac{\gamma \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right)}{m_2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_2}}\right)}, 0 \right).$$

Es ist erkennbar, daß Q_1 und Q_2 instabil sind. Deshalb werden wir im Folgenden nur die Stabilität der Punkte des L_K neben der Veränderung der K untersuchen, denn das Zusammenleben der Rassen kann nur im Punkte L_K verwirklicht werden. Da wir die Untersuchung mit der Bedingung $\lambda_1 = \lambda_2$ führen müssen, ist es notwendig die Aufgabe in zwei Teile zu zerlegen. Die Bedingung $\lambda_1 = \lambda_2$ kann man so verwirklichen, daß

$$a_1 = a_2 \quad \text{und} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1}{m_2} \quad (2.1.7)$$

oder, daß

$$a_1 > a_2 \quad \text{und} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1}{m_2}. \quad (2.1.8)$$

(Man kann sehen, daß $m_1 < m_2$ und $d_1 < d_2$ für (2.1.8) notwendig sind.) Den Fall (2.1.7) nennt man in der Fachliteratur den Kampf der fast gleichförmigen Raubtiere, den Fall (2.1.8) den Kampf der r - und K -Strategen, wobei die 1-ste Rasse r -Strategie und die 2-te K -Strategie heißen [4].

2.2. Der Kampf der fast gleichförmigen Raubtiere im Modell von Ivlev

Untersuchen wir die Stabilität der mit dem (2.1.6) gegebenen Gleichgewichtslagen des Systems (2.1.5), wenn (2.1.7) erfüllt ist. Bezeichnen wir

$c = d_2/d_1 = m_2/m_1$, wo wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c \geq 1$ annehmen können. (Gleichzeitig ist auch $\beta_2/\beta_1 = c$ wahr.) Damit wird das System (2.1.5) das Folgende:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - (x_1 + cx_2)m_1 \left(1 - e^{-\frac{S}{a}}\right) \\ \dot{x}_1 &= x_1\beta_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda-S}{a}}\right) \\ \dot{x}_2 &= x_2\beta_2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda-S}{a}}\right) \end{aligned} \right\}. \quad (2.2.1)$$

Die dritte Gleichung des Systems (2.2.1) dividieren wir durch die zweite. So bekommen wir die Differentialgleichungen der Trajektorien:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1^c}, \quad \text{so} \quad \frac{x_2}{x_1^c} = p, \quad \text{wobei} \quad p \geq 0. \quad (2.2.2)$$

Die Funktion x_2/x_1^c ist das erste Integral des Systems (2.2.1), so die parabolischen Zylinder $x_2/x_1^c = p$ die invarianten Flächen des Systems (2.2.1) sind. Diese füllen den positiven Octanten vollständig aus. Wir legen p fest und verengern das System (2.2.1) auf die invarianten Flächen. Wir bekommen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - (x_1 + pcx_1^c)m_1 \left(1 - e^{-\frac{S}{a}}\right) \\ \dot{x}_1 &= x_1\beta_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda-S}{a}}\right) \end{aligned} \right\}. \quad (2.2.3)$$

Die Gleichgewichtslagen des Systems (2.2.3) sind: $(0, 0)$, $(K, 0)$, die instabil sind und der Schnittpunkt des L_K mit $x_2/x_1^c = p$, wobei L_K jetzt:

$$\left. \begin{aligned} L_K &= \left\{ (S, x_1, x_2); \quad (x_1 + x_2c)m_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a}}\right) = \gamma\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right); \right. \\ &\quad \left. S = \lambda, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Wenn wir den Schnittpunkt als (λ, ξ_1, ξ_2) bezeichnen, dann ist

$$(\xi_1 + pc\xi_2^c) = \frac{\gamma\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right)}{m_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a}}\right)} \quad (2.2.5)$$

und $\xi_2 = pc\xi_1^c$ (wobei ξ_1 die einzige positive Lösung der Gleichung (2.2.5) ist.) Mit der Einführung der Bezeichnung $K_0 = \lambda \left(1 + \frac{a(e^{\lambda/a} - 1)}{a(e^{\lambda/a} - 1) - \lambda} \right)$, können wir folgendes Theorem über die Stabilität der (λ, ξ_1) Gleichgewichtslage des Systems (2.2.3) formulieren:

2.2.1 Theorem:

- a) Wenn $\lambda < K < K_0$ ist, dann ist die Gleichgewichtslage $((\lambda, \xi_1(p, K))$ des Systems (2.2.3) asymptotisch stabil.
- b) Wenn $K = K_0$ ist, dann durchläuft das System eine superkritische Hopf-Bifurkation.

Beweis:

- a) Führen wir am System folgende Koordinatentransformation durch:
 $y_1 = S - \lambda$; $y_2 = x_1 - \xi_1$. Das transformierte System heißt:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= \gamma(y_1 + \lambda) \left(1 - \frac{(y_1 + \lambda)}{K} \right) \\ &\quad - [(y_2 + \xi_1) + pc(y_2 + \xi_1)^c] m_1 \left(1 - e^{-\frac{y_1 + \lambda}{a}} \right) \\ \dot{y}_2 &= (y_2 + \xi_1) \beta_1 \left(1 - e^{-\frac{y_1}{a}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.3t)$$

Das Origo ist die Gleichgewichtslage des Systems (2.2.3t) bei jedem $\xi_1 > 0$ und $K > 0$ Fall. Linearisieren wir das System (2.2.3t) im Origo. Die Koeffizientenmatrix heißt:

$$A = \begin{bmatrix} \gamma\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) - \gamma\frac{\lambda}{K} - (\xi_1 + pc\xi_1^c) e^{-\frac{\lambda}{a}} \frac{m_1}{a} & - (1 + pc^2\xi_1^{c-1}) m_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a}} \right) \\ \beta_1 \frac{\xi_1}{a} & 0 \end{bmatrix},$$

und das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mu) &= \mu^2 - \mu \left[\gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) - \gamma\frac{\lambda}{K} - (\xi_1 + pc\xi_1^c) e^{-\frac{\lambda}{a}} \frac{m_1}{a} \right] \\ &\quad + \beta_1 \frac{\xi_1}{a} \left(1 + pc^2\xi_1^{c-1} \right) m_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a}} \right). \end{aligned}$$

Der konstante Ausdruck ist positiv. Der Koeffizient des linearen Stücks ist genau dann positiv, wenn $K < K_0$.

- b) Im Fall K/K_0 benutzen wir das Bifurkationstheorem von Hopf (siehe [7]), und zum Beweis des Superkritischen benutzen wir die in [1] befindliche Methode. Das System (2.2.3t) erfüllt die Bedingungen des Hopf-Theorems. Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix des linearisierten Systems bezeichnen wir als $\mu_{1,2}(K)$, und so können wir folgendes sagen:

$$\operatorname{Re} \mu(K) = \frac{1}{2} \left\{ \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) - \gamma \frac{\lambda}{K} - (\xi_1 - pc\xi_1^c) e^{-\frac{\lambda}{a} m_1} \right\}.$$

Nach der Beendigung der Transformation $Q = K - K_0$ kann man bei der Benutzung des (2.2.5) leicht sehen, daß

$$\operatorname{Re} \mu(Q=0) = 0, \quad \operatorname{Re} \mu(Q > 0) > 0, \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} \mu(Q < 0) < 0.$$

Leicht ergibt sich auch folgendes:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\operatorname{Re} \mu(Q)}{dQ} \right|_{Q=0} &= \frac{1}{2} \left\{ 2\gamma \frac{\lambda}{K_0^2} + \gamma \frac{\lambda^2}{a (e^{\frac{\lambda}{a}} - 1) K_0^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \gamma \frac{\lambda}{K_0^2} \left\{ 2 - \frac{\lambda}{a (e^{\frac{\lambda}{a}} - 1)} \right\} > 0. \end{aligned}$$

Außerdem kann man feststellen, daß $\operatorname{Im} \mu(Q=0) \neq 0$ ist, weil:

$$\left[\gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K_0} \right) - \gamma \lambda \frac{1 - \frac{\lambda}{K_0}}{\left(e^{\frac{\lambda}{a}} - 1 \right) a} \right]^2 < 4\beta_1 \frac{\xi_1}{a} [1 + pc^2 \xi_1^{c-1}] m_1 \left(1 - a^{-\frac{\lambda}{a}} \right),$$

weil die linke Seite null und die rechte Seite positiv ist. Damit sind die Bedingungen des Hopf-Theorems erfüllt, also gibt es eine geschlossene Bahn in der Umwelt des $(\lambda, \xi_1(p, K))$. Des Weiteren steht die Frage, ob diese Bahn orbital asymptotisch stabil ist. Dazu lösen wir das System (2.2.3t) bis zum dritten Glied der Potenzreihe. Wir bilden also folgende Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{10}y_1 + a_{01}y_2 + P_2(y_1, y_2) + P_3(y_1, y_2) + \dots \\ \dot{y}_2 &= b_{10}y_1 + b_{01}y_2 + Q_2(y_1, y_2) + Q_3(y_1, y_2) + \dots \end{aligned} \right\}, \quad (2.2.6)$$

wo:

$$\left. \begin{aligned} P_2(y_1, y_2) &= a_{20}y_1^2 + a_{11}y_1y_2 + a_{02}y_2^2 \\ P_3(y_1, y_2) &= a_{30}y_1^3 + a_{21}y_1^2y_2 + a_{12}y_1y_2^2 + a_{03}y_2^3 \\ Q_2(y_1, y_2) &= b_{20}y_1^2 + b_{11}y_1y_2 + b_{02}y_2^2 \\ Q_3(y_1, y_2) &= b_{30}y_1^3 + b_{21}y_1^2y_2 + b_{12}y_1y_2^2 + b_{03}y_2^3 \end{aligned} \right\}. \quad (2.2.7)$$

Von den Koeffizienten bilden wir:

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & -\frac{\pi}{4a_{01}\eta^3} \left\{ \left[a_{01}b_{10}(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) \right. \right. \\ & + a_{10}a_{01}(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{02}) + b_{10}^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) \\ & - 2a_{10}b_{10}(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2a_{10}a_{01}(a_{02}^2 - b_{02}b_{20}) - a_{01}^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) \\ & + (a_{01}b_{10} - 2a_{10}^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{02}) \left. \right] - (a_{10}^2 + a_{01}b_{10}) \left[3(b_{10}b_{03} - a_{01}a_{30}) \right. \\ & \left. \left. + 2a_{10}(a_{21} + b_{12}) + (b_{10}a_{12} - a_{01}b_{21}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

wobei: $\eta = \sqrt{a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10}}$.

Des Weiteren müssen wir das Vorzeichen des α_3 bestimmen. Nach der Berechnung der Koeffizienten und Vereinfachung bekommen wir:

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & \frac{\pi}{4\eta^3} \left[-2\frac{\gamma}{K}\beta_1\frac{\xi_1}{a^2}m_1 \left(1 + pc^2\xi_1^{c-1} \right) \left\{ e^{-\frac{\lambda}{a}} - 2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a}} \right) \right\} \right. \\ & + (\xi_1 + pc\xi_1^c) \frac{m_1}{a^2} e^{-\frac{\lambda}{a}} \left(1 + pc^2\xi_1^{c-1} \right) m_1 \xi_1 \frac{\beta_1}{a^2} \left\{ -2 \left(1 - e^{-\lambda/a} \right) \right. \\ & \left. \left. + e^{-\frac{\lambda}{a}} + 3 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a}} \right) \right\} \right], \end{aligned}$$

wobei $\eta > 0$ ist.

Jetzt müssen wir nur noch das Vorzeichen des in der eckigen Klammer stehenden Ausdrucks bestimmen. Mit der Benutzung des (2.2.5) und des Ersatzes von K durch K_0 bekommen wir folgendes:

$$\frac{m_1}{a^2} \beta_1 \xi_1 \frac{1 + pc^2 \xi_1^{c-1}}{2a \left(e^{\frac{\lambda}{a}} - 1 \right) - \lambda} \gamma \left\{ \frac{2}{\lambda} \left(a \left(e^{\frac{\lambda}{a}} - 1 \right) - \lambda \right) \left(3e^{-\frac{\lambda}{a}} - 2 \right) + \frac{\lambda}{a} \right\}.$$

Des Weiteren genügt die Untersuchung des in der geschwungenen Klammer stehenden Ausdrucks, weil die anderen Faktoren positiv sind. Dafür führen wir folgendes ein: $\lambda/a = X > 0$, $\lambda = aX$, wir bekommen: $-2/X \left(-3Xe^{-X} - 3e^{-X} - 2e^X + 2X + 5 - X^2/2 \right) > 0$, in jedem Fall $X > 0$. Die Wahrheit dieser Aussage bestimmen wir folgendermassen: Wir beweisen, daß $-3Xe^{-X} - 3e^{-X} - 2e^X + 2X + 5 - X^2/2 < 0$, in jedem Fall $X > 0$. Dieser Ausdruck ist null bei $X=0$ und im Fall $X > 0$ mit wachsendem X fallend, das heißt die erste Ableitung dieses Ausdrucks ist negativ im Fall $X > 0$. Die Ableitung ist: $3Xe^{-X} - 2e^X + 2 - X$. Folgende Gleichung stellt eine obere Abschätzung der Ableitung dar: $3Xe^{-X} - 2e^X + 2 - X < 3X - 2e^X + 2 - X = -2e^X + 2 + 2X = 2(1 + X - e^X) < 0$. Damit sehen wir, daß $\alpha_3 < 0$. Das bedeutet, daß die Hopf-Bifurkation superkritisch ist.!

Bemerkung: Wenn $\lambda < K < K_0$ ist, dann ist der Attraktivitätsbereich der asymptotisch stabilen Gleichgewichtslage $\lambda(\xi_1(p, K))$ des Systems (2.2.3): $\{(S, x_1) : S > 0, x_1 > 0\}$.

Mit dem nächsten Theorem kehren wir zu dem System (2.2.1) zurück.

2.2.2 Theorem:

Im Fall $\lambda < K < K_0$ sind die mit (2.2.4) gegebenen Punkte des Abschnittes L_K des Systems (2.2.1) im Sinne von Ljapunov stabile Gleichgewichtslagen. Im Fall $K \geq K_0$ sind sie instabil.

Beweis:

Linearisieren wir das System (2.2.1) im Punkt (λ, ξ_1, ξ_2) , in dem (λ, ξ_1, ξ_2) die Gleichgewichtslage des Systems ist. Die charakteristische Gleichung heißt:

$$\mathcal{D}(\mu) = \mu \left[\mu^2 - \mu \left[\gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) - \gamma \frac{\lambda}{K} - (\xi_1 + c\xi_2) e^{-\frac{\lambda}{a}} \frac{m_1}{a} \right] \right]$$

$$+ \left\{ \frac{c^2}{a} \beta_1 \xi_2 m_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a}} \right) + \beta_1 \frac{\xi_1}{a} m_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a}} \right) \right\}.$$

Man kann sehen, daß $\mu = 0$ immer einen Eigenwert darstellt. Das zweidimensionale Polynom in der Klammer ist stabil, wenn seine Koeffizienten positiv sind. Der konstante Teil ist positiv, wenn $\lambda < K < K_0$. (Das ergibt sich aus (2.2.4).) Dann hat unser System einen null und einen positiv realteiligen Eigenwert. Da durch jeden Punkt (λ, ξ_1, ξ_2) des L_K einer aus der invarianten Menge der parabolischen Zylinder verläuft, konvergiert jede Lösung in dieser Fläche gegen den entsprechenden Punkt (λ, ξ_1, ξ_2) , wenn $t \rightarrow \infty$. Im Fall $\lambda < K < K_0$ kann man das über alle Punkte (λ, ξ_1, ξ_2) aussagen, so ist L_K in diesem Fall stabil. (Im entgegengesetzten Fall ist L_K instabil.) Der Eigenwert $\mu = 0$ bedeutet, daß die Punkte des L_K nicht gegeneinander konvergieren!

2.2.3 Theorem:

- Im Fall $\lambda < K < K_0$ ist der mit (2.2.4) gegebene Abschnitt der Attraktor des Systems (2.2.1).
- Im Fall $K = K_0$ bifurkiert L_K durch einen Zylinder, der die Union der geschlossenen Bahnen darstellt. Dieser Zylinder ist der Attraktor des Systems.

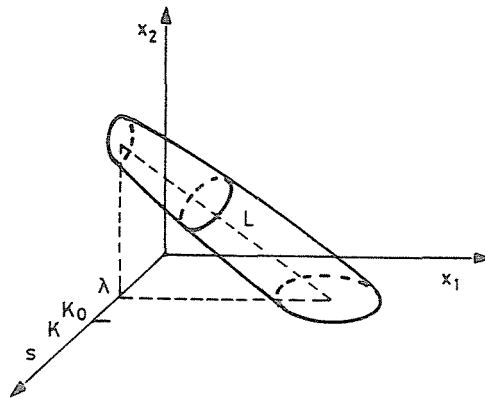


Abb. 1. Der Zylinder ist der Attraktor

Beweis:

- a) Die Behauptung folgt aus den Theoremen 2.2.1 und 2.2.2.
- b) Die Behauptung ergibt sich daraus, daß wir im zweidimensionalen System eine superkritische Hopf-Bifurkation bewiesen haben, welche auf jeden Punkt von L_K zutrifft. Wegen der Kontinuität ergibt die Union der geschlossenen Bahnen einen Zylinder, wenn wir noch die Ergebnisse von [3] beachten!

Zusammenfassend können wir sagen, daß das System neben dem verhältnismäßig niedrigen Nahrungsniveau — $\lambda < K < K_0$ — in irgendeinem Punkt des L_K im stabilen Gleichgewicht ist. Alle Punkte des L_K können in Betracht kommen, einschließlich die Endpunkte P_1 und P_2 . Die Punkte des L_K stellen irgendwelche Raubtierverhältnisse ξ_1/ξ_2 dar, zwischen denen kein bezeichnender Unterschied existiert. Wenn wir den K -Wert vergrößern, dann verlieren die Gleichgewichtslagen bei $K = K_0$ ihre Stabilität, und das System beginnt auf einer auf den oben erwähnten Zylindern liegenden geschlossenen Bahn stabil zu schwingen. (Siehe Abbildung 2.2.2.) Diese Erscheinung nennt die Fachliteratur das Paradox der Weite, also die Ernährungsweite destabilisiert das System.

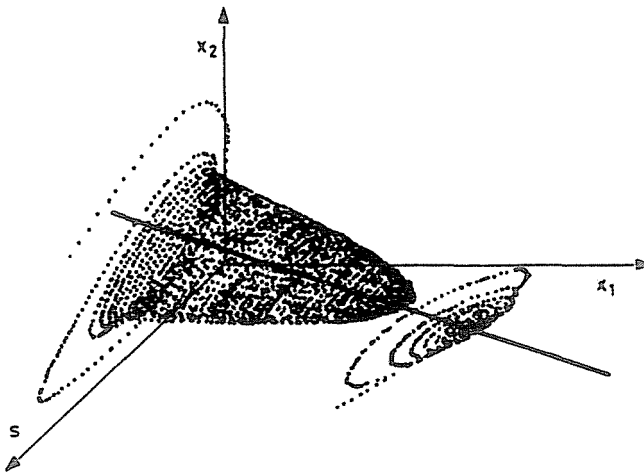


Abb. 2. Orbitale asymptotisch stabile Bahn (Superkritische Hopf-Bifurkation)*

* Das ist eine Computerabbildung, welche auf Grund des Programms von [5] angefertigt wurde.

2.3. Der Kampf des r - und K -Strategen im Modell von Ivlev

In diesem Teil werden wir die Stabilität der mit (2.1.6) gegebenen Gleichgewichtslagen des Systems (2.1.5) in dem Fall untersuchen, wenn (2.1.8) erfüllt ist. Linearisieren wir das System (2.1.5) in einem beliebigen Punkt (λ, ξ_1, ξ_2) des L_K . Das charakteristische Polynom des linearisierten Systems ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mu) = \mu \left[\mu^2 + \mu \left[-\gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) + \gamma \frac{\lambda}{K} + \xi_1 \frac{m_1}{a_1} e^{-\frac{\lambda}{a_1}} + \xi_2 \frac{m_2}{a_2} e^{-\frac{\lambda}{a_2}} \right] \right. \\ \left. + \xi_1 m_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_1}} \right) \frac{\beta_1}{a_1} + \xi_2 m_2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_2}} \right) \frac{\beta_2}{a_2} \right]. \end{aligned}$$

Man kann sehen, daß $\mu = 0$ immer einen Eigenwert darstellt. Das zweidimensionale Polynom in der Klammer ist stabil, wenn seine Koeffizienten positiv sind. Der konstante Ausdruck ist positiv, weil er durch Addition des Produkts der positiven Faktoren entsteht. Der Koeffizient des linearen Teils muß auch positiv sein, also:

$$\xi_1 \frac{m_1}{a_1} e^{-\frac{\lambda}{a_1}} + \xi_2 \frac{m_2}{a_2} e^{-\frac{\lambda}{a_2}} > \gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) - \gamma \frac{\lambda}{K}.$$

Durch Umformen, Nulladdition und Multiplizieren der Ungleichung mit λ bekommen wir:

$$\begin{aligned} \left(m_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_1}} \right) - \lambda \frac{m_1}{a_1} e^{-\frac{\lambda}{a_1}} \right) \xi_1 + \left(m_2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_2}} \right) - \lambda \frac{m_2}{a_2} e^{-\frac{\lambda}{a_2}} \right) \xi_2 \\ < \gamma \frac{\lambda^2}{K}. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Wenn wir (2.3.1) untersuchen, können wir sagen:

a) Die linke Seite ist positiv für alle $(\lambda, \xi_1, \xi_2) \in L_K$, weil:

$$m_i \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_i}} \right) - \lambda \frac{m_i}{a_i} e^{-\frac{\lambda}{a_i}} > 0.$$

b) Die rechte Seite ist positiv, vermindert sich mit wachsendem K und konvergiert gegen Null, wenn $K \rightarrow \infty$.

Die Gerade B_K sei folgendermassen gegeben:

$$B_K = \left\{ (S, x_1, x_2) \in \mathcal{R}^3 : S = \lambda, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \right.$$

$$\left. \left(m_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_1}} \right) - \lambda \frac{m_1}{a_1} e^{-\frac{\lambda}{a_1}} \right) \xi_1 + \left(m_2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_2}} \right) - \lambda \frac{m_2}{a_2} e^{-\frac{\lambda}{a_2}} \right) \xi_2 \right. \\ \left. = \gamma \frac{\lambda^2}{K} \right\}. \quad (2.3.2)$$

Wenn wir (2.3.2) und (2.3.1) vergleichen, können wir sehen, daß wir die Bedingung der Stabilität als die Stellung der zwei Geraden (L_K und B_K) zueinander angeben können. Bestimmen wir den Schnittpunkt des L_K und B_K . Es ergibt sich:

$$x_1 = -\gamma \frac{-\lambda \left(-\frac{1}{K} \right) m_2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_2}} \right) + \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) \left(\left(\lambda \frac{m_2}{a_2} e^{-\frac{\lambda}{a_2}} \right) - m_2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_2}} \right) \right)}{m_2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_2}} \right) \frac{m_1}{a_1} e^{-\frac{\lambda}{a_1}} - \frac{m_2}{a_2} e^{-\frac{\lambda}{a_2}} m_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_1}} \right)},$$

$$x_2 = -\gamma \frac{-\lambda \left(-\frac{1}{K} \right) m_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_1}} \right) + \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) \left(\left(\lambda \frac{m_1}{a_1} e^{-\frac{\lambda}{a_1}} \right) - m_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_1}} \right) \right)}{m_2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_2}} \right) \frac{m_1}{a_1} e^{-\frac{\lambda}{a_1}} - \frac{m_2}{a_2} e^{-\frac{\lambda}{a_2}} m_1 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_1}} \right)}.$$

2.3.1 Theorem:

Wenn das System (2.1.5) den Bedingungen des (2.1.8) genügt, dann existieren solche $\lambda < K_1 < K_2 < \infty$, daß

- im Fall $K \in (\lambda, K_1)$ alle mit dem (2.1.6) gegebenen Punkte des Abschnitts L_K im Sinne von Ljapunov stabil sind und L_K der Attraktor des Systems ist.
- Im Fall $K \in (K_1, K_2)$ teilt sich der Punkt $(\lambda, x_1(K), x_2(K))$ des L_K in zwei Teile. (Ein Teil kann auch eine leere Menge sein.) Solche Punkte des L_K , die sich links von diesem Punkt befinden, sind instabil, die rechts von diesem Punkt liegen, sind stabil. Dieser rechte Teil des L_K ist der Attraktor des Systems.
- Im Fall $K \in (K_2, \infty)$ sind die Punkte des L_K instabil.

Beweis:

Das ist ein spezieller Fall des Beweises des in [4] befindlichen 3.1. Theorems. Wir können die spezielle Anwendung dieser Methode auf das Ivlev-Modell in meiner früheren Arbeit [5] finden, wo auch bewiesen ist, daß sich K_1 und K_2 aus folgenden Ausdrücken ergeben:

$$K_1 = \lambda \left(1 + \frac{a_2 \left(e^{\frac{\lambda}{a_2}} - 1 \right)}{a_2 \left(e^{\frac{\lambda}{a_2}} - 1 \right) - \lambda} \right); \quad K_2 = \lambda \left(1 + \frac{a_1 \left(e^{\frac{\lambda}{a_1}} - 1 \right)}{a_1 \left(e^{\frac{\lambda}{a_1}} - 1 \right) - \lambda} \right) .!$$

Halten wir fest, daß $x_1(K)$ monoton wachsend und $x_2(K)$ monoton fallend ist. Daraus folgt: Wenn K von K_1 bis K_2 wächst, dann bewegt sich der Punkt $(\lambda, x_1(K), x_2(K))$ entlang L_K von der rechten zur linken Seite, während L_K parallel verschoben wird. In diesem Prozess destabilisieren sich die hinter $(\lambda, x_1(K), x_2(K))$ verbleibenden Punkte. Diese Erscheinung heißt Reißverschlußbifurkation (Zip bifurcation). (Siehe [4].) Diese Erscheinung am besten bezeichnende mit Computer simulierte Abbildung zeigt *Abb. 3*.

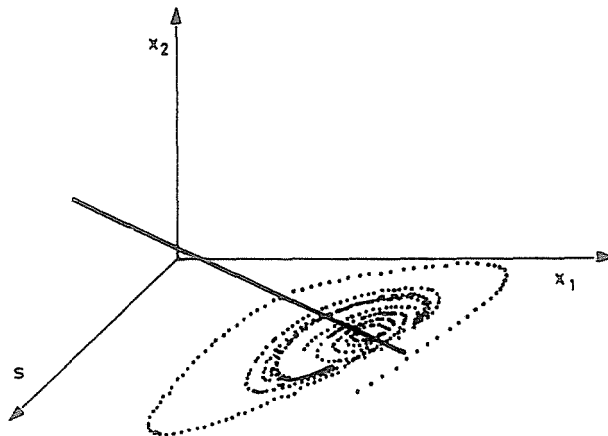


Abb. 3. Zip bifurcation

Im Folgenden müssen wir unter dem Verhältnis der Raubtiere die

$$\frac{K\text{-Strategie-Individuumszahl}}{r\text{-Strategie-Individuumszahl}} = \frac{\xi_2}{\xi_1}$$

verstehen, die stabil ist, wenn die dadurch vertretende Gleichgewichtslage im Sinn von Ljapunov stabil ist und im entgegengesetzten Fall instabil ist.

2.3.2 Theorem:

Wenn das System (2.1.5) die Bedingung (2.1.8) erfüllt, dann gilt folgendes:

- Für $K \in (\lambda, K_1)$ sind alle Verhältnisse der Raubtiere stabil;
- Im Fall $K \in (K_1, K_2)$ destabilisiert sich das Verhältnis ξ_2/ξ_1 der Raubtiere kontinuierlich so, daß sich zuerst die oberen Verhältnisse destabilisieren.
- Im Fall $K \in (K_2, \infty)$ sind alle Verhältnisse der Raubtiere instabil.

Beweis:

Dieser Beweis ist die Folge des 2.3.1 Theorems!

Des Weiteren werden wir die Destabilisierung der Endpunkte des L_K mit Hilfe der in [4] befindlichen sogenannten Farkas-Methode untersuchen.

Sowohl die $x_1 = 0$ als auch die $x_2 = 0$ Koordinatenebene ist eine invariante Menge des Systems (2.1.5). Beschränken wir (2.1.5) irgendwie, bekommen wir:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - x_i m_i \left(1 - e^{-\frac{S}{a_i}}\right) \\ \dot{x}_i &= x_i \beta_i \left(1 - e^{-\frac{\lambda - S}{a_i}}\right) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2). \quad (2.1.5i)$$

Die Gleichgewichtslage des Systems (2.1.5i) ist innerhalb des positiven Ebenenquadranten:

$$P_i(K) = (\lambda, \xi_i) = \left(\lambda, \frac{\gamma \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right)}{m_i \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{a_i}}\right)} \right).$$

Aus dem vorhergegangenen ist leicht ersichtlich, daß $P_i(K)$ im Fall $\lambda < K < K_{3-i}$ asymptotisch stabil und im Fall $K > K_{3-i}$ instabil ist. Bei dem Wert $K = K_{3-i}$ können wir den Verlust der Stabilität mit dem nächsten Theorem charakterisieren.

2.3.3 Theorem:

Die Gleichgewichtslage $P_i(K)$ des Systems (2.1.5i) durchläuft eine superkritische Hopf-Bifurkation bei dem $K = K_{3-i}$ Wert ($i = 1, 2$).

Beweis:

Wir stellen fest, daß wir das System (2.1.5i) aus dem System (2.2.3) ableiten können, wenn $p = 0$ und $i = 1$ ist. (Wenn wir im (2.2.3) das x_2 behalten hätten, dann wäre das äquivalent mit dem (2.1.5i), wenn $p = 0$ und $i = 2$ ist.) $p = 0$ bedeutet, daß ein Raubtier fehlt, wir befinden uns also auf der $x_1 = 0$ oder auf der $x_2 = 0$ Ebene. Weil ein Raubtier fehlt, wird dem kleine Bedeutung zugemessen, daß über welche ähnlichen oder verschiedenen Eigenschaften die Raubtiere verfügen, also hat $a_1 > a_2$ keine Bedeutung. Mit dem wiederholenden Beweis des 2.2.1 Theorems ist auch unser Theorem bewiesen!

Bemerkung: Das 2.3.3 Theorem können wir durch die Benützung anderer Ergebnisse auch beweisen. Siehe z.B. in meiner Arbeit [6] die Untersuchung der Bedingungen des 3.4 Theorems von [4]. In [5] können wir den Beweis mit Anwendung des Hopf-Theorems finden. Ebenso können wir in dieser Arbeit auch für die Perioden- und Amplitudenschätzung dienende Ausdrücke der sich herausbildenden orbitalen asymptotisch stabilen Bahnen finden.

Unsere Ergebnisse zusammenfassend können wir sagen, daß sich beliebige Raubtiervershältnisse herausbilden können, wenn wir den K Wert der Erhaltungsfähigkeit der Natur von λ bis K_1 steigern. Wenn wir den K Wert über K_1 bis K_2 steigern, dann kann sich nicht jedes Raubtiervershältnis herausbilden. Wir sehen, wenn wir mehr r -Strategen als K -Strategen haben, dann könnten wir dieses Verhältnis mit Vergrößerung des K Wertes länger aufrechterhalten, als wenn das Verhältnis der Raubtiere niedriger gewesen wäre. Der r -Strategie verschafft sich also kontinuierlich Vorteile gegenüber dem K -Strategen. Dieser Prozess dauert bis zum völligen Aussterben des K -Strategen ($K = K_2$). Wenn wir den K Wert gegenüber K_2 steigern, dann trifft das Paradox der Weite ein, d.h. das System beginnt zu schwingen.

3.1. Das Modell von Rosenzweig

Ähnlich zum ersten Teil werden wir jetzt ein weiteres konkretes Modell untersuchen, welches sich vom Ivlev-Modell nur darin unterscheidet, daß die Geburtenraten der Raubtiere die Funktion von Rosenzweig ist: $p(S, a_i) = \frac{A}{B a_i + C} S^q$; $0 < q < 1$, wobei $a_1 > 0$, $B > 0$, $C \in \mathcal{R}$ und $m_i = \frac{A}{B a_i + C}$ ($i = 1, 2$).

2). Diese p Funktion genügt auch den in der Literatur [8] auffindbaren natürlichen Bedingungen. Unser Modell wird jetzt das Folgende:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - x_1 m_1 S^q - x_2 m_2 S^q \\ \dot{x}_1 &= x_1 m_1 S^q - d_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 m_2 S^q - d_2 x_2 \end{aligned} \right\}. \quad (3.1.1)$$

Wir bemerken, daß im Punkt $S = 0$ das Existenz- und Unizitätstheorem dem System (3.1.1) nicht genügt, was aber deshalb nicht beachtet werden braucht, weil sich herausstellen wird, daß $S = 0$ abgestoßen wird. Für diesen Fall werden wir also keine Untersuchungen führen.

Vergleichen wir das System (3.1.1) und das System (2.1.1). Es ist zu sehen, daß ihr Aufbau sehr ähnlich ist. (Hier sind auch die auf das (3.1.1) zutreffenden Behauptungen a, b, d , gültig und statt c , ist das wahr, daß die p Funktion nicht beschränkt ist.) Es gibt aber auch einen großen Unterschied, der darin besteht, daß das (3.1.1) nicht vom a_i explizit abhängt. Später wird sich herausstellen, daß das abweichende Benehmen der zwei Modelle sich aus diesem Unterschied ergibt.

Nach dem Muster der Bezeichnungen (2.1.2)–(2.1.4) führen wir Folgendes ein:

$$\beta_i = m_i - d_i > 0 \quad (i = 1, 2), \quad (3.1.2)$$

$$\lambda_i = \left(1 - \frac{\beta_i}{m_i}\right)^{\frac{1}{q}} \quad (i = 1, 2), \quad (3.1.3)$$

$$0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < K. \quad (3.1.4)$$

Mit Hilfe der Bezeichnungen (3.1.2)–(3.1.4) wird das System (3.1.1) in folgender Form geschrieben:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - x_1 m_1 S^q - x_2 m_2 S^q \\ \dot{x}_1 &= x_1 \beta_1 \frac{\lambda^q - S^q}{\lambda^q - 1} \\ \dot{x}_2 &= x_2 \beta_2 \frac{\lambda^q - S^q}{\lambda^q - 1} \end{aligned} \right\}. \quad (3.1.5)$$

Die Gleichgewichtslagen des Systems (3.1.5) sind $Q_1 = (0, 0, 0)$, $Q_2 = (K, 0, 0)$ und die Punkte auf dem nächsten geraden Abschnitt:

$$L_K = \left\{ (S, x_1, x_2) \in \mathcal{R}^3 : S = \lambda, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \right.$$

$$x_1 m_1 \lambda^q + x_2 m_2 \lambda^q = \gamma \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) \}. \quad (3.1.6)$$

Bezeichnen wir die Punkte des L_K als (λ, ξ_1, ξ_2) . Die Endpunkte sind auf der $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ Ebene:

$$P_1 = (\lambda, 0, \xi_2) = \left(\lambda, 0, \frac{\gamma \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right)}{m_2 \lambda^q} \right),$$

$$P_2 = (\lambda, \xi_1, 0) = \left(\lambda, \frac{\gamma \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right)}{m_1 \lambda^q}, 0 \right).$$

Es ist sichtbar, daß Q_1 und Q_2 instabil sind. Deshalb werden wir in Folgendem nur die Stabilität der Punkte des L_K im Fall der Erfüllung von (3.1.2)–(3.1.4) untersuchen. Man kann sehen, daß wir diese Bedingungen nur dann erfüllen können, wenn (2.1.7) erfüllt ist. In diesem Modell kann also nur der Kampf der fast gleichförmigen Raubtiere zustande kommen.

3. Der Kampf der fast gleichförmigen Raubtiere im Modell von Rosenzweig

Untersuchen wir die Stabilität des mit (3.1.6) gegebenen Gleichgewichtslage des Systems (3.1.5) mit Hilfe der in diesem Teil aufgezeigten Methode. Unser System wird mit Hilfe der Bezeichnungen $c = d_2/d_1 = m_2/m_1 = \beta_2/\beta_1$, $c \geq 1$ das Folgende:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= \gamma S \left(1 - \frac{S}{K} \right) - (x_1 + c x_2) m_1 S^q \\ \dot{x}_1 &= x_1 \beta_1 \frac{\lambda^q - S^q}{\lambda^q - 1} \\ \dot{x}_2 &= x_2 \beta_2 \frac{\lambda^q - S^q}{\lambda^q - 1} \end{aligned} \right\}. \quad (3.2.1)$$

Beschränken wir (3.2.1) auf einen von

$$\frac{x_2}{x_1^c} = p \quad p \geq 0 \quad (3.2.2)$$

parabolischen Zylinder, wir bekommen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= \gamma S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - (x_1 + pcx_1^c) m_1 S^q \\ \dot{x}_1 &= x_1 \beta_1 \frac{\lambda^q - S^q}{\lambda^q - 1} \end{aligned} \right\}. \quad (3.2.3)$$

Die Gleichgewichtslagen des Systems (3.2.3) sind: $(0,0)$, $(K,0)$, welche instabil sind und der Schnittpunkt des L_K mit $x_2/x_1^c = p$. L_K wird jetzt:

$$L_K = \left\{ (S, x_1, x_2) : (x_1 + x_2 c) m_1 \lambda^q = \gamma \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right); \right. \\ \left. S = \lambda, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \right\}. \quad (3.2.4)$$

Bezeichnend den Schnittpunkt als (λ, ξ_1, ξ_2) , bekommen wir:

$$(\xi_1 + pc\xi_2^c) = \frac{\gamma \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right)}{m_1 \lambda^q} \quad (3.2.5)$$

und $\xi_2 = pc\xi_1^c$. Mit der Bezeichnung $K_0 = \lambda \left(1 + \frac{1}{1-q}\right)$, können wir das nächste Theorem über die Stabilität der Gleichgewichtslage (λ, ξ_1) des Systems (3.2.3) formulieren:

3.2.1 Theorem:

- Wenn $\lambda < K < K_0$ und $\lambda < 1$ ist, dann ist die Gleichgewichtslage $(\lambda, \xi_1(p, K))$ des (3.2.3) Systems asymptotisch stabil.
- Wenn $K = K_0$ und $\lambda < 1$, dann durchläuft das System eine superkritische Hopf-Bifurkation.
- Wenn $\lambda > 1$ ist, dann — wir können K beliebig wählen — ist das System instabil.

Beweis:

Der Beweis erfolgt analog dem Beweis des 2.2.1 Theorems. Deshalb werden wir nur die wichtigsten Schritte aufzeigen.

- Wir führen am System (3.2.3) folgende Koordinatentransformation aus: $y_1 = S - y$, $y_2 = x_1 - \xi_1$. Wir linearisieren das transformierte System im Origo, und bilden das charakteristische Polynom. Wir bekommen:

$$\mathcal{D}(\mu) = \mu^2 - \mu \left[\gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) - \gamma \frac{\lambda}{K} - q\gamma \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) \right] \\ - \left(1 + pc^2 \xi_1^{c-1} \right) q m_1 \beta_1 \xi_1^{\lambda q - 1}.$$

Dabei können wir sehen, daß im Fall $\lambda < 1$ und $\lambda < K < K_0$ alle Koeffizienten des charakteristischen Polynoms positiv sind, und im Fall $\lambda > 1$ der konstante Ausdruck negativ ist.

- b) Bei der Untersuchung der Eigenwerte des linearisierten Systems stellt sich heraus, daß die Bedingungen des Hopf-Theorems erfüllt sind. Zum Einsehen des Superkritischen bilden wir die Ausdrücke (2.2.6) und (2.2.7). Nach Berechnung der Koeffizienten müssen wir das Vorzeichen der (2.2.8) bestimmen. Nach der Vereinfachung bekommen wir:

$$\alpha_3 = -\frac{\pi}{4\eta^3} \left\{ \left(1 + pc^2 \xi_1^{c-1} \right) m_1 \frac{\lambda^{2q-4}}{1-\lambda^q} \beta_1 \xi_1 q \gamma \right\} \left\{ -\frac{4}{K} \lambda^2 (q-1) \right. \\ \left. - \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) q (q-1)^2 - \frac{2}{K} \lambda^2 q - \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) q^2 (q-1) \right. \\ \left. + 3\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) q (q-1)(q-2) \right\},$$

wobei $\eta > 0$.

Weil der in der ersten geschwungenen Klammer stehende Ausdruck positiv ist, ist es ausreichend, das Vorzeichen des in der zweiten geschwungenen Klammer stehenden Ausdrucks zu bestimmen. Wir ersetzen K durch K_0 . Nach Vereinfachung bekommen wir:

$\lambda/(2-q) \{q^3 + 5q + 4\} > 0$. Das bedeutet, daß $\alpha_3 < 0$ ist, so daß die Bifurkation superkritisch ist!

Bemerkung: Wenn $\lambda < K < K_0$ und $\lambda < 1$ ist, dann besitzt der Attraktivitätsbereich der asymptotisch stabilen Gleichgewichtslage $\lambda(\xi_1(p, K))$ des Systems (3.2.3) folgende $\{(S, x_1) : S > 0, x_1 > 0\}$.

Mit dem nächsten Theorem kehren wir zu dem System (3.2.1) zurück.

3.2.2 Theorem:

Im Fall $\lambda < K < K_0$ und $\lambda < 1$ sind die mit dem (3.2.4) gegebenen Punkte des Abschnittes L_K des (3.2.1) Systems im Sinne von Ljapunov stabile Gleichgewichtslagen und im Fall $K > K_0$ (λ beliebig) oder im $\lambda > 1$ (K beliebig) sind sie instabil.

Beweis:

Der Beweis geschieht analog dem Beweis des 2.2.3 Theorems!

3.2.3 Theorem

- a) Im Fall $\lambda < K < K_0$ und $\lambda < 1$ ist der mit (3.2.4) gegebene Abschnitt der Attraktor des Systems (3.2.1).
- b) Im Fall $K = K_0$ und $\lambda < 1$ bifurkiert L_K durch einen Zylinder, der die Union der geschlossenen Bahnen darstellt. Dieser Zylinder ist der Attraktor des Systems.

Beweis:

Der Beweis geschieht analog dem Beweis des 2.2.3 Theorems!

Zusammenfassend können wir sagen, daß alle Punkte des L_K im Falle von kleinen λ Werten ($\lambda < 1$) und im Bezug auf die $\lambda < K < K_0$ Erhaltungsfähigkeit der Natur stabil sind. Im Fall $K = K_0$ ($\lambda < 1$) können wir die Erscheinung des Hopf-Bifurkation beobachten. Im Fall $K > K_0$ ($\lambda < 1$) sind alle Punkte des L_K bei gleichwertigen realen Werten von K ihr Stabilitätbenehmen abhängig von λ wechseln. Wenn wir dies mit den Ergebnissen des Ivlev-Modells im Fall der fast gleichförmigen Raubtiere vergleichen, dann ist zu sehen, daß es bei kleinem λ ($\lambda < 1$) keinen Unterschied zwischen dem Benehmen der zwei Modelle gibt, so daß sich das Rosenzweig-Modell entsprechend der Zusammenfassung des 2.2. Teils verhält. Der Unterschied zwischen den zwei Modellen besteht darin, daß sich der Kampf des r - und K -Strategen im Rosenzweig-Modell gar nicht herausbilden kann. Die Begründung dafür ist, daß entsprechend der Definition 2.1 von [4] das Ivlev-Modell ein natürliches und das Rosenzweig-Modell ein degeneriertes Modell darstellen.

Literatur

1. ANDRONOV, A. A. – LEONTOVIC, E. A. – GORDON, – MAJER: Teorija bifurkacij dinamičeskih sistem na ploskosti, Nauka, Moskva, 1967. p. 262 (russisch).
2. CSABA, GY.: A biológiai szabályozás, Medicina, Budapest, 1978. (11. III. 3.) (ungarisch).
3. FARKAS, M.: Zip Bifurcation in a Competition Model. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, Vol. 8. No. 11. 1984. pp. 1295–1309.
4. FARKAS, M.: Competitive Exclusion by Zip Bifurcation Dynamical Systems, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 287*, Springer, Berlin, 1987. pp. 165–178.
5. KISS, K.: Die Untersuchung der Dynamik der "Zip-Bifurkation", Technische Universität, Budapest, Diplomarbeit, 1988 (ungarisch).
6. KISS, K.: Die Untersuchung der Dynamik der "Zip-Bifurkation", Wissenschaftliche Konferenz für Studenten, Budapest, 1988 (ungarisch).
7. MARSDEN, J. E. – MCCracken, M.: The Hopf Bifurcation and its Applications, Springer, New York, 1976.
8. MAY, R. M.: Stability and Complexity in Model Ecosystems, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974. p. 79.

Address:

Krisztina KISS
Technische Universität
Institut für Mathematik
H-1521, Budapest, Ungarn